

## Echappement à ancre suisse à repos équidistants

### Dégagement d'entrée - Dynamique (première approximation)

#### Calibre 11 1/2''' - seconde au centre - automatique - balancier à vis

➔ Référence : E:\Résonateur (TA)\Echappement\EASRE - D\_entrée - transmission.mcd(R)  $ms := 10^{-3} \cdot s$

$$T_0 = 0.4 \text{ s} \quad f = 2.5 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot f \quad J_b = 20 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2 \quad \theta_0 = 270 \text{ deg} \quad \psi := 0$$

#### Couple à la roue d'échappement

$$C_B = 10.019 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad \rho_0 = 4.38 \times 10^3 \quad C_r := \frac{C_B}{\rho_0} \quad C_r = 2.287 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{mm}$$

#### Rapports moyens de transmissions

$$\text{Rapports de vitesses angulaires roue - ancre } \omega_r / \omega_a \quad K_{ra} := 0.5 \cdot (K_{de}(0) + K_{de}(\varepsilon)) \quad K_{ra} = -0.141$$

$$\text{Rapports de couples angulaires ancre - roue } C_a / C_r \quad K'_{ra} := 0.5 \cdot (K'_{de}(0) + K'_{de}(\varepsilon)) \quad K'_{ra} = -0.229$$

$$\text{Rapports de vitesses angulaires ancre - balancier } \omega_a / \omega_b \quad \kappa_{ab} := 0.5 \cdot (\kappa_{de}(0) + \kappa_{de}(\varepsilon)) \quad \kappa_{ab} = 0.236$$

$$\text{Rapports de couples angulaires balancier - ancre } C_b / C_a \quad \kappa'_{ab} := 0.5 \cdot (\kappa'_{de}(0) + \kappa'_{de}(\varepsilon)) \quad \kappa'_{ab} = 0.232$$

#### Mouvement de l'ancre en contact avec la roue d'échappement

$$\text{Inertie de l'ancre (estimation)} \quad J_a = 0.2 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2 \quad \text{Inertie du rouage} \quad J_{rouage} = 0.602 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$$

$$\text{Inertie totale ancre + rouage} \quad J_A := J_{rouage} \cdot K_{ra}^2 + J_a \quad J_A = 0.212 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$$

$$\text{Couple moyen de dégagement de l'ancre} \quad C_d := K'_{ra} \cdot C_r \quad C_d = -5.24 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\text{Mouvement de l'ancre à partir de sa position de repos} \quad \psi a(\psi_0, \omega_a, \tau) := \psi_0 + \omega_a \cdot \tau + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_d}{J_A} \cdot \tau^2 \quad \omega a(\omega_a, \tau) := \omega_a + \frac{C_d}{J_A} \cdot \tau$$

#### Mouvement du balancier en négligeant le frottement quadratique

##### Mouvement libre amorti

$$\text{Conditions initiales} \quad \omega := \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \eta_b^2} \quad T := \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad t_0 := \frac{T}{2} \quad -\theta_0 = -270 \text{ deg} \quad \omega_b := 0 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\theta_{cv}(\varphi) := -f_b + (-\theta_0 + f_b) \cdot \left( \cos(\varphi - \pi) + \frac{\eta_b \cdot \omega_0}{\omega} \cdot \sin(\varphi - \pi) \right) \cdot e^{-\frac{\eta_b \cdot \omega_0}{\omega} \cdot (\varphi - \pi)} \quad \omega b_{cv}(\varphi) := \omega \cdot \left( \frac{d}{d\varphi} \theta_{cv}(\varphi) \right)$$

$$\text{Perte d'amplitude en une alternance libre} \quad \theta_{cv}(2 \cdot \pi) - |\theta_0| = -2.26 \text{ deg} \quad \text{Vérification} \quad 2 \cdot f_b + \pi \cdot \eta_b \cdot \theta_0 = 2.27 \text{ deg}$$

$$\text{Mouvement libre non amorti} \quad \theta_b(\theta_0, \omega_b, \tau) := \theta_0 + \omega_b \cdot \tau$$

##### Déplacement de l'ancre virtuel : fourchette restant en contact avec la cheville de plateau

$$\psi a_c(\psi_0, \omega_b, \tau) := \psi_0 + \kappa_{ab} \cdot \omega_b \cdot \tau \quad \omega a_c(\omega_b, \tau) := \kappa_{ab} \cdot \omega_b$$

#### Formules simplifiées de chocs cheville de plateau - entrée de fourchette

$$\text{Coefficient de restitution} \quad \varepsilon_c := 0.65$$

$$\text{Vitesse angulaire de l'ancre après le choc} \quad \omega a'(\omega_a, \omega_b) := \omega_a - (1 + \varepsilon_c) \cdot (\omega_a - \kappa_{ab} \cdot \omega_b)$$

$$\text{Vitesse angulaire du balancier après le choc} \quad \omega b'(\omega_a, \omega_b) := \omega_b$$

Durée entre deux chocs consécutifs  $\Delta\tau_c(\omega_a, \omega_b) := \frac{2 \cdot J_A}{C_d} \cdot \varepsilon_c \cdot (-\omega_b \cdot \kappa_{ab} + \omega_a)$

### Premier choc cheville de plateau - entrée de fourchette

Amplitudes du balancier et de l'ancre au premier choc  $\theta_{de} := -0.5 \cdot \lambda_b$   $\psi_{de} := 0 \cdot \text{deg}$

Instant du premier choc  $j := 0$

Approximation d'ordre 0  $\varphi_{de} := \pi + \arccos\left(\frac{-\theta_{de}}{\theta_0}\right)$   $\varphi_{de} = 264.9 \text{ deg}$   $t_{de} := \frac{\varphi_{de}}{\omega}$   $t_{de} = 0.29433 \text{ s}$

Avec frottements visqueux et constant  $\varphi := \varphi_{de}$

$\varphi_{de} := \text{racine}(\theta_{cv}(\varphi) - \theta_{de}, \varphi)$   $\varphi_{de} = 265.056 \text{ deg}$   $\theta_{cv}(\varphi_{de}) = -24 \text{ deg}$   $t_{de} := \frac{\varphi_{de}}{\omega}$   $t_{de} = 0.29451 \text{ s}$

### Vitesses du balancier et de l'ancre juste avant le premier choc

**Balancier**  $\omega_b := \omega_{b_{cv}}(\varphi_{de})$   $\omega_b = 73.45 \text{ s}^{-1}$  **Ancre**  $\omega_{a_j} := 0 \cdot \text{s}^{-1}$

### Vitesses du balancier et de l'ancre juste après le premier choc

**Balancier**  $\omega'_b := \omega_{b'}(\omega_{a_j}, \omega_b)$   $\omega'_b = 73.45 \text{ s}^{-1}$

**Ancre**  $\omega'_{a_j} := \omega_{a'}(\omega_{a_j}, \omega_b)$   $\omega'_{a_j} = 28.618 \text{ s}^{-1}$

Situation au premier choc  $t_{c_j} := t_{de}$   $t_{c_0} = 0.29451 \text{ s}$

$\theta 0_j := \theta_{de}$   $\theta 0_j = -24 \text{ deg}$   $\omega_b = 73.45 \text{ s}^{-1}$   $\omega'_b = 73.45 \text{ s}^{-1}$

$\psi 0_j := \psi_{de}$   $\psi 0_j = 0 \text{ deg}$   $\omega_{a_j} = 0$   $\omega'_{a_j} = 28.618 \text{ s}^{-1}$

### Deuxième choc cheville de plateau - entrée de fourchette

Instant du deuxième choc  $j := j + 1$   $n := 100$   $i := 0 .. n$

$\Delta t_{c_j} := \Delta\tau_c(\omega_{a_{j-1}}, \omega_b)$   $\Delta t_{c_j} = 0.912 \text{ ms}$   $t_{c_j} := t_{c_{j-1}} + \Delta t_{c_j}$   $t_{c_j} = 0.29542 \text{ s}$   $\delta := \frac{\Delta t_{c_j}}{n}$

### Evolution entre les premier et deuxième chocs

$\tau_i := i \cdot \delta$   $T_{i,j} := \tau_i + t_{c_{j-1}}$   $\tau_d := T^{\langle 1 \rangle}$

**Balancier**  $\theta_{i,j} := \theta_b(\theta 0_{j-1}, \omega_b, \tau_i)$   $\theta_d := \theta^{\langle 1 \rangle}$   $\omega_b = 73.45 \text{ s}^{-1}$

**Ancre**

$\Psi_{i,j} := \psi_a(\psi 0_{j-1}, \omega'_{a_{j-1}}, \tau_i)$   $\Omega_{a_{i,j}} := \omega_{a'}(\omega'_{a_{j-1}}, \tau_i)$   $\Psi_{c_{i,j}} := \psi_c(\psi 0_{j-1}, \omega_b, \tau_i)$   $\Omega_{c_{i,j}} := \omega_c(\omega_b, \tau_i)$

$\Psi_d := \Psi^{\langle 1 \rangle}$   $\Omega_{a_{0,1}} := \omega_{a_{j-1}}$   $\Omega_{ad} := \Omega_a^{\langle 1 \rangle}$   $\Psi_{cd} := \Psi_c^{\langle 1 \rangle}$   $\Omega_{cd} := \Omega_c^{\langle 1 \rangle}$

### Calcul du deuxième choc

$\psi 0_j := \Psi_{n,j}$   $\psi 0_j = 0.906 \text{ deg}$   $\psi 0_{c_j} := \Psi_{c_{n,j}}$   $\psi 0_{c_j} = 0.906 \text{ deg}$   $\theta 0_j := \theta_{n,j}$

$\omega_{a_j} := \Omega_{a_{n,j}}$   $\omega_{a_j} = 6.07 \text{ s}^{-1}$   $\omega'_{a_j} := \omega_{a'}(\omega_{a_j}, \omega_b)$   $\omega'_{a_j} = 24.672 \text{ s}^{-1}$   $\theta 0_j = -20.163 \text{ deg}$

### Troisième choc cheville de plateau - entrée de fourchette

Instant du troisième choc  $j := j + 1$

$$\Delta t_{c_j} := \Delta \tau_c(\omega_{a_{j-1}}, \omega_b) \quad \Delta t_{c_j} = 0.593 \text{ ms} \quad t_{c_j} := t_{c_{j-1}} + \Delta t_{c_j} \quad t_{c_j} = 0.29601 \text{ s} \quad \alpha := \frac{\Delta t_{c_j}}{n}$$

Evolution entre les deuxième et troisième chocs

$$\tau_i := i \cdot \alpha \quad T_{i,j} := \tau_i + t_{c_{j-1}} \quad \tau_d := \text{pile}(\tau_d, T^{\langle j \rangle})$$

**Balancier**  $\theta_{i,j} := \theta_b(\theta_{0_{j-1}}, \omega_b, \tau_i) \quad \theta_d := \text{pile}(\theta_d, \theta^{\langle j \rangle}) \quad \omega_b = 73.45 \text{ s}^{-1}$

**Ancre**

$$\psi_{i,j} := \psi_a(\psi_{0_{j-1}}, \omega'_{a_{j-1}}, \tau_i) \quad \Omega_{a_{i,j}} := \omega_a(\omega'_{a_{j-1}}, \tau_i) \quad \psi_{c_{i,j}} := \psi_c(\psi_{0_{j-1}}, \omega_b, \tau_i) \quad \Omega_{c_{i,j}} := \omega_c(\omega_b, \tau_i)$$

$$\psi_d := \text{pile}(\psi_d, \psi^{\langle j \rangle}) \quad \Omega_{ad} := \text{pile}(\Omega_{ad}, \Omega_a^{\langle j \rangle}) \quad \psi_{cd} := \text{pile}(\psi_{cd}, \psi_c^{\langle j \rangle}) \quad \Omega_{cd} := \text{pile}(\Omega_{cd}, \Omega_c^{\langle j \rangle})$$

Calcul du troisième choc

$$\psi_{0_j} := \psi_{n,j} \quad \psi_{0_j} = 1.495 \text{ deg} \quad \psi_{0_{c_j}} := \psi_{c_{n,j}} \quad \psi_{0_{c_j}} = 1.495 \text{ deg} \quad \theta_{0_j} := \theta_{n,j}$$

$$\omega_{a_j} := \Omega_{a_{n,j}} \quad \omega_{a_j} = 10.016 \text{ s}^{-1} \quad \omega'_{a_j} := \omega_a(\omega_{a_j}, \omega_b) \quad \omega'_{a_j} = 22.107 \text{ s}^{-1} \quad \theta_{0_j} = -17.669 \text{ deg}$$

### Quatrième choc cheville de plateau - entrée de fourchette

Instant du quatrième choc  $j := j + 1$

$$\Delta t_{c_j} := \Delta \tau_c(\omega_{a_{j-1}}, \omega_b) \quad \Delta t_{c_j} = 0.385 \text{ ms} \quad t_{c_j} := t_{c_{j-1}} + \Delta t_{c_j} \quad t_{c_j} = 0.2964 \text{ s} \quad \alpha := \frac{\Delta t_{c_j}}{n}$$

Evolution entre les troisième et quatrième chocs

$$\tau_i := i \cdot \alpha \quad T_{i,j} := \tau_i + t_{c_{j-1}} \quad \tau_d := \text{pile}(\tau_d, T^{\langle j \rangle})$$

**Balancier**  $\theta_{i,j} := \theta_b(\theta_{0_{j-1}}, \omega_b, \tau_i) \quad \theta_d := \text{pile}(\theta_d, \theta^{\langle j \rangle}) \quad \omega_b = 73.45 \text{ s}^{-1}$

**Ancre**

$$\psi_{i,j} := \psi_a(\psi_{0_{j-1}}, \omega'_{a_{j-1}}, \tau_i) \quad \Omega_{a_{i,j}} := \omega_a(\omega'_{a_{j-1}}, \tau_i) \quad \psi_{c_{i,j}} := \psi_c(\psi_{0_{j-1}}, \omega_b, \tau_i) \quad \Omega_{c_{i,j}} := \omega_c(\omega_b, \tau_i)$$

$$\psi_d := \text{pile}(\psi_d, \psi^{\langle j \rangle}) \quad \Omega_{ad} := \text{pile}(\Omega_{ad}, \Omega_a^{\langle j \rangle}) \quad \psi_{cd} := \text{pile}(\psi_{cd}, \psi_c^{\langle j \rangle}) \quad \Omega_{cd} := \text{pile}(\Omega_{cd}, \Omega_c^{\langle j \rangle})$$

Calcul du quatrième choc

$$\psi_{0_j} := \psi_{n,j} \quad \psi_{0_j} = 1.878 \text{ deg} \quad \psi_{0_{c_j}} := \psi_{c_{n,j}} \quad \psi_{0_{c_j}} = 1.878 \text{ deg} \quad \theta_{0_j} := \theta_{n,j}$$

$$\omega_{a_j} := \Omega_{a_{n,j}} \quad \omega_{a_j} = 12.581 \text{ s}^{-1} \quad \omega'_{a_j} := \omega_a(\omega_{a_j}, \omega_b) \quad \omega'_{a_j} = 20.44 \text{ s}^{-1} \quad \theta_{0_j} = -16.048 \text{ deg}$$

### Cinquième choc cheville de plateau - entrée de fourchette

Instant du cinquième choc  $j := j + 1$

$$\Delta t_{c_j} := \Delta \tau_c(\omega_{a_{j-1}}, \omega_b) \quad \Delta t_{c_j} = 0.25 \text{ ms} \quad t_{c_j} := t_{c_{j-1}} + \Delta t_{c_j} \quad t_{c_j} = 0.29665 \text{ s} \quad \alpha := \frac{\Delta t_{c_j}}{n}$$

### Evolution entre les quatrième et cinquième chocs

$$\tau_i := i \cdot \delta \quad T_{i,j} := \tau_i + t_{c_{j-1}} \quad \tau_d := \text{pile}(\tau_d, T^{\langle j \rangle})$$

**Balancier**  $\theta_{i,j} := \theta_b(\theta_{0_{j-1}}, \omega_b, \tau_i) \quad \theta_d := \text{pile}(\theta_d, \theta^{\langle j \rangle}) \quad \omega_b = 73.45 \text{ s}^{-1}$

#### Ancre

$$\psi_{i,j} := \psi_a(\psi_{0_{j-1}}, \omega'_{a_{j-1}}, \tau_i) \quad \Omega_{a_{i,j}} := \omega_a(\omega'_{a_{j-1}}, \tau_i) \quad \psi_{c_{i,j}} := \psi_{ac}(\psi_{0_{j-1}}, \omega_b, \tau_i) \quad \Omega_{c_{i,j}} := \omega_{ac}(\omega_b, \tau_i)$$

$$\psi_d := \text{pile}(\psi_d, \psi^{\langle j \rangle}) \quad \Omega_{ad} := \text{pile}(\Omega_{ad}, \Omega_a^{\langle j \rangle}) \quad \psi_{cd} := \text{pile}(\psi_{cd}, \psi_c^{\langle j \rangle}) \quad \Omega_{cd} := \text{pile}(\Omega_{cd}, \Omega_c^{\langle j \rangle})$$

### Calcul du cinquième choc

$$\psi_{0_j} := \psi_{n,j} \quad \psi_{0_j} = 2.127 \text{ deg} \quad \psi_{0_{c_j}} := \psi_{c_{n,j}} \quad \psi_{0_{c_j}} = 2.127 \text{ deg} \quad \theta_{0_j} := \theta_{n,j}$$

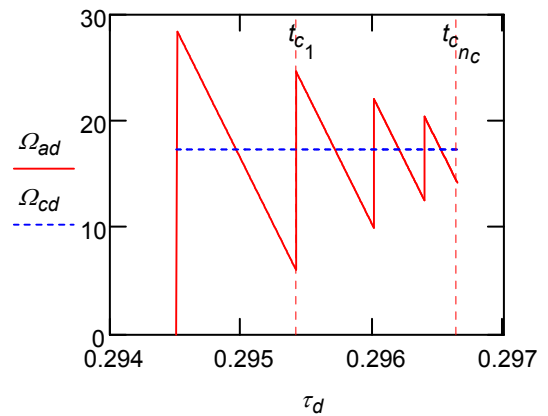
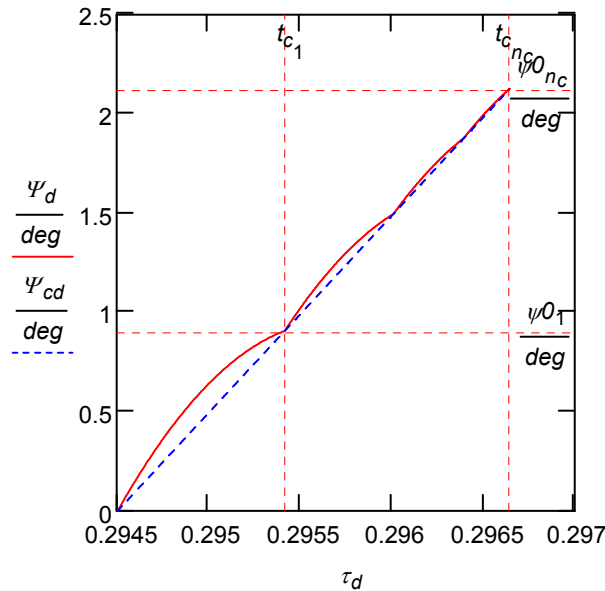
$$\omega_{a_j} := \Omega_{a_{n,j}} \quad \omega_{a_j} = 14.248 \text{ s}^{-1} \quad \omega'_{a_j} := \omega_a(\omega_{a_j}, \omega_b) \quad \omega'_{a_j} = 19.357 \text{ s}^{-1} \quad \theta_{0_j} = -14.994 \text{ deg}$$

### Situation à la fin du cinquième choc

$$n_c := j$$

$$t_c = \begin{pmatrix} 0.295 \\ 0.295 \\ 0.296 \\ 0.296 \\ 0.297 \end{pmatrix} \text{ s} \quad \Delta t_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.912 \\ 0.593 \\ 0.385 \\ 0.25 \end{pmatrix} \text{ ms} \quad \psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.906 \\ 1.495 \\ 1.878 \\ 2.127 \end{pmatrix} \text{ deg} \quad \theta_0 = \begin{pmatrix} -24 \\ -20.163 \\ -17.669 \\ -16.048 \\ -14.994 \end{pmatrix} \text{ deg} \quad \omega_b = 73.45 \text{ s}^{-1}$$

#### Mouvement de l'ancre



$$\omega_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.07 \\ 10.016 \\ 12.581 \\ 14.248 \end{pmatrix} \text{ s}^{-1} \quad \omega'_a = \begin{pmatrix} 28.618 \\ 24.672 \\ 22.107 \\ 20.44 \\ 19.357 \end{pmatrix} \text{ s}^{-1}$$

### Situation à la fin du dégagement

**Balancier**  $D_b = 10.5 \text{ deg} \quad \theta_{fde} := \theta_{de} + D_b \quad \theta_{fde} = -13.5 \text{ deg} \quad \omega_b = 73.45 \text{ s}^{-1}$

**Ancre**  $\psi_{fde} := \varepsilon \quad \omega_{afde} := \kappa_{de}(\varepsilon) \cdot \omega_b \quad \psi_{fde} = 2.5 \text{ deg} \quad \omega_{afde} = 18.371 \text{ s}^{-1}$

**Roue**  $\alpha_{fde} := -\alpha_0 \quad \omega_{rfde} := K_{de}(\varepsilon) \cdot \omega_{afde} \quad \alpha_{fde} = -30 \text{ deg} \quad \omega_{rfde} = -2.842 \text{ s}^{-1}$

## Analyse des chocs

Formule de récurrence  $\Delta t_{c_j} := \varepsilon_c \cdot \Delta t_{c_{j-1}}$   $\Delta t_c^T = (0 \ 0.912 \ 0.593 \ 0.385 \ 0.25) \text{ ms}$

Durée entre les premier et cinquième chocs

$$\sum_{j=1}^{n_c} \Delta t_{c_j} = 2.14 \times 10^{-3} \text{ s} \quad \Delta \tau_{nc}(n_c) := \frac{-2 \cdot J_A}{C_d} \cdot \kappa_{ab} \cdot \omega_b \cdot \frac{\varepsilon_c \cdot (1 - \varepsilon_c^{n_c})}{1 - \varepsilon_c} \quad \Delta \tau_{nc}(n_c) = 2.14 \text{ ms}$$

Valeur asymptotique

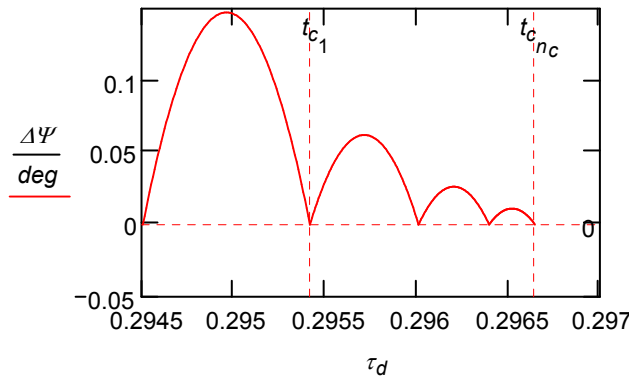
$$\Delta \tau_{asympt} := \frac{-2 \cdot J_A}{C_d} \cdot \kappa_{ab} \cdot \omega_b \cdot \frac{\varepsilon_c}{1 - \varepsilon_c} \quad \Delta \tau_{asympt} = 2.605 \text{ ms}$$

Déplacement par percussions de l'ancre

$$\Delta \psi_{asympt} := \kappa_{ab} \cdot \omega_b \cdot \Delta \tau_{asympt} \quad \Delta \psi_{asympt} = 2.589 \text{ deg}$$

Écart d'angle maximal entre fourchette et cheville

$$\Delta \Psi := \Psi_d - \Psi_{cd}$$



$$\Delta \psi_m := \max(\Delta \Psi) \quad \Delta \psi_m = 0.147 \text{ deg}$$

$$\text{ind}(x, x_m) := \begin{cases} j \leftarrow 0 \\ \text{while } x_j < x_m \\ j \leftarrow j + 1 \end{cases} \quad j$$

$$\text{ind} := \text{ind}(\Delta \Psi, \Delta \psi_m) \quad \Delta \Psi_{\text{ind}} = 0.147 \text{ deg}$$

$$\tau_{d_{\text{ind}}} = 0.29496 \text{ s}$$

$$\Psi_{d_{\text{ind}}} = 0.6 \text{ deg}$$

$$\delta_{\text{tol}} := R'_2(\Psi_{d_{\text{ind}}}) \cdot \Psi_{d_{\text{ind}}} \quad \delta_{\text{tol}} = 0.029 \text{ mm}$$

## Durée maximale de la phase des chocs en fonction du coefficient de restitution

$$\omega_b = 73.45 \text{ s}^{-1} \quad \Delta \tau_{asympt}(\varepsilon_c) := -2 \cdot \frac{J_A}{C_d} \cdot \kappa_{ab} \cdot \omega_b \cdot \frac{\varepsilon_c}{1 - \varepsilon_c}$$

Angle correspondant parcouru par l'ancre

$$\Delta \psi_{asympt}(\varepsilon_c) := \kappa_{ab} \cdot \omega_b \cdot \Delta \tau_{asympt}(\varepsilon_c)$$

Nombre de chocs

$$nc(\varepsilon_c) := \text{partenti\`ere} \left( \frac{\ln \left( 1 - \frac{\psi_{fde}}{\Delta \psi_{asympt}(\varepsilon_c)} \right)}{\ln(\varepsilon_c)} \right) + 1 \quad nc(\varepsilon_c) = 8$$

$$x := .3, .31 \dots .8$$

$$\varepsilon_c := .5, .501 \dots 1$$

